ÜBER EINE IDEALTHEORETISCHE FUNKTION*

VON

EDMUND LANDAU

Einleitung.

Es sei k eine positive ganze Zahl. Es sei $T_k(n)$ die Anzahl der Zerlegungen der positiven ganzen Zahl n in k positive ganzzahlige Faktoren $a_1\, a_2 \cdots a_k$; hierbei gelten Zerlegungen, welche sich durch Faktorenanordnung unterscheiden, als verschieden.† Insbesondere ist daher $T_1(n)$ stets $=1$ und $T_2(n)$ gleich der Anzahl der (positiven) Teiler von n. Es sei s eine komplexe Zahl, σ ihr reeller Teil; es bedeute n^s die Zahl $e^{s \log n}$ bei reeller Wahl des Logarithmus.

Den Gegenstand der Doktordissertation von Herrn PILTZ‡ vom Jahre 1881 bildet der Nachweis der Relation

$$\tau_k(x;s) = \sum_{n=1}^{x} \frac{T_k(n)}{n^s}$$

$$(1) \qquad = x^{1-s} \sum_{m=0}^{k} b_m \log^m x + b + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k}}) + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x),$$

wo (bei festem k und festem s) die Zahlen $b, b_0, \cdots, b_k$ gewisse Konstanten sind, von denen b_k für $s \neq 1$ den Wert 0 hat.

Ausführlicher geschrieben:

$$\tau_k(x;s) = \begin{cases} b_0 x^{1-s} + b + O(x^{-\sigma}) & \text{für } k=1,\ s \neq 1, \\ b_1 \log x + B + O(x^{-1}) & \text{für } k=1,\ s=1, \\ x^{1-s} \sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + b + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x) & \text{für } k \geqq 2,\ s \neq 1, \\ \sum_{m=1}^{k} b_m \log^m x + B + O(x^{-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x) & \text{für } k \geqq 2,\ s=1. \end{cases}$$

Noch ausführlicher, unter Vernachlässigung des in einzelnen Unterfällen gegen

* Presented to the Society September 12, 1911.

† Es ist also z. B. $T_2(4)=3$ mit Rücksicht auf die 3 Zerlegungen $4=1\cdot 4=2\cdot 2=4\cdot 1$.

‡ PILTZ 1 in der Numerierung meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909).

das Restglied unerheblichen konstanten Gliedes:

$$\tau_k(x;\, s) = \begin{cases} b_0 x^{1-s} + b + O(x^{-\sigma}) & \text{für } k = 1,\ \sigma > 0 \text{ exkl. } s = 1, \\ b_0 x^{1-s} + O(x^{-\sigma}) & \text{für } k = 1,\ \sigma \leqq 0, \\ b_1 \log x + B + O(x^{-1}) & \text{für } k = 1,\ s = 1, \\ x^{1-s} \sum\limits_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + b + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x) & \\ & \text{für } k \geqq 2,\ \sigma > 1 - \frac{1}{k} \text{ exkl. } s = 1, \\ x^{1-s} \sum\limits_{m=0}^{-1} b_m \log^m x + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x) & \\ & \text{für } k \geqq 2,\ \sigma \leqq 1 - \frac{1}{k}, \\ \sum\limits_{m=1}^{k} b_m \log^m x + B + O(x^{-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x) & \\ & \text{für } k \geqq 2,\ s = 1. \end{cases}$$

Wie Herr PILTZ* hervorhob, ist die Angabe der Konstanten, d. h. des Hauptteils der rechten Seite von (1), ziemlich einfach und die Hauptschwierigkeit der Nachweis, dass das Fehlerglied wirklich höchstens die angegebene Grössenordnung hat. Der PILTZsche Beweis verläuft im Gebiete der elementaren Theorie der DIRICHLETschen Reihen.

Speziell für $s = 0$ kommt, wenn kurz

$$\tau_k(x;\ 0) = \tau_k(x)$$

gesetzt wird, also $\tau_k(x)$ die Anzahl der Lösungen von

$$a_1 a_2 \cdots a_k \leqq x$$

in positiven ganzen Zahlen bezeichnet, als Spezialfall von (1) heraus:

$$(2) \quad \tau_k(x) = \sum_{n=1}^{x} T_k(n) = x \sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + O(x^{1-\frac{1}{k}}) + O(x^{1-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x).$$

Für $k = 1$ ist (2) natürlich trivial†. Für $k = 2$ war (2) schon durch DIRICHLET‡ bekannt und ist vor einigen Jahren von VORONOÏ§ verschärft worden, was

* Loc. cit., S. 5.

† $\sum\limits_{n=1}^{x} 1 = [x] = x + O(1)$.

‡ DIRICHLET 12.

§ VORONOÏ 1.

ich mit Absicht * hier nicht benutze. Für $k=3$ war (2) ohne Kenntnis der PILTZschen Arbeit lange danach von Herrn FRANEL † anders bewiesen worden und später (unter Hinweis auf Herrn PILTZ) von mir ‡ auf einem dritten, einfacheren Wege. Da $\tau_k(x)$ schon durch Herrn PILTZ behandelt war, ging ich a. a. O. nicht über $k=3$ hinaus und verwies für allgemeines k auf die PILTZsche Arbeit. Heute möchte ich, zumal ich einzelnes vereinfachen kann, das ganze PILTZsche Resultat (1), also insbesondere (2) mit beliebigem k auf Grund meines damaligen Ansatzes beweisen, also einfacher als in der PILTZschen Arbeit. Ich leiste aber auch, was das Resultat betrifft, etwas Neues, indem ich statt des Körpers der rationalen Zahlen einen beliebigen algebraischen Zahlkörper κ zu Grunde lege, dessen Grad ich ν nenne.

Ich will gleich mein Resultat für ein beliebiges κ angeben. Für $\nu=1$ ist es der Körper der rationalen Zahlen. Für $\nu \geqq 2$ gilt das Folgende. $T_k(n)$ sei die Anzahl der Darstellungen von n als Norm des Produktes von k Idealen des Körpers §, und es werde auch hier

$$\tau_k(x;\, s)=\sum_{n=1}^{x}\frac{T_k(n)}{n^s}$$

gesetzt, also

$$\tau_k(x;\, s)=\sum_{N(\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_k)\leqq x}\frac{1}{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_k)^s}.$$

Das neue Ziel dieser Arbeit ist, zu beweisen:

$$(3)\quad \tau_k(x;\, s)=\begin{cases} b_0x^{1-s}+O(\log x) & \text{für } k=1,\ \sigma=1-\dfrac{1}{\nu},\\[2mm] b_0x^{1-s}+b+O(x^{1-\sigma-\frac{1}{\nu}}) & \text{für } k=1,\ \sigma\gtrless 1-\dfrac{1}{\nu} \text{ exkl. } s=1,\\[2mm] b_1\log x+B+O(x^{-\frac{1}{\nu}}) & \text{für } k=1,\ s=1,\\[2mm] x^{1-s}\displaystyle\sum_{m=0}^{k}b_m\log^m x+b+O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k\nu}}\log^{k-2}x) & \\ & \text{für } k\geqq 2,\end{cases}$$

wo b_k für $s \neq 1$ verschwindet.

Ich mache gleich darauf aufmerksam, dass zwar im Falle $k\geqq 2$ die Relation (1) als Spezialfall $\nu=1$ in (3) enthalten ist, auch im Falle $k=1$ ausserhalb

* Es erfordert diese Verschärfung feinere Hilfsmittel, welche bei der Ausdehnung auf beliebige algebraische Zahlkörper, um welche es sich im Text handeln wird, versagen.

† FRANEL 5.

‡ LANDAU 7.

§ D. h. $T_k(n)$ ist die Anzahl der Systeme $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_k$, für welche $N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_k)=n$ ist, wobei solche Systeme, die sich durch die Anordnung der k Ideale unterscheiden, als verschieden gerechnet werden.

der Geraden $\sigma = 1 - 1/\nu$, nicht aber im Falle $k = 1$ auf der Geraden $\sigma = 1 - 1/\nu$.

(3) enthält als Spezialfall $s = 0$:

(4) $$\tau_k(x) = \sum_{n=1}^{x} T_k(n) = x \sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + O(x^{1-\frac{1}{k\nu}}) + O(x^{1-\frac{1}{k\nu}} \log^{k-2} x);$$

$\tau_k(x)$ ist die Anzahl der Lösungen von

$$N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_k) \leqq x$$

in Idealen des Körpers.

Für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper ist der Fall $k = 1$ der Relation (4), nämlich

(5) $$\tau_1(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1 = ax + O(x^{1-\frac{1}{\nu}}),$$

das von Herrn WEBER* herrührende Fundament der analytischen Idealtheorie; von ihm ausgehend habe ich† schon im Jahre 1903 den Spezialfall $k = 2$ von (4) bewiesen:

(6) $$\tau_2(x) = x(b_1 \log x + b_0) + O(x^{1-\frac{1}{2\nu}}).$$

Diese Relation (6) enthält als spezielle Fälle die klassische DIRICHLETsche Relation (beim Körper κ (1)) und die entsprechende von Herrn MERTENS‡ bei $\kappa(i)$ gegebene. Meine Arbeit war, was durch den kurzen Zeitraum zu entschuldigen ist, Herrn AXER§ entgangen, der in einer 1904 erschienenen Arbeit eine Reihe asymptotischer Gesetze für den speziellen Körper $\kappa(\rho) = \kappa(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3})$ der dritten Einheitswurzeln behandelte und dabei auch u. a. den Spezialfall $\kappa(\rho)$ von (6) bewies.

Dagegen bin ich sehr erstaunt über eine kürzlich, im Jahre 1910, erschienene Abhandlung von Herrn SCHLESER‖, der an die AXERsche Arbeit anknüpft, die in dieser (weniger einfach) behandelten und namentlich viele andere asymptotische Gesetze für den speziellen Körper $\kappa(\rho)$ beweist, ohne meine genannte Arbeit vom Jahre 1903 (auf die ich in meinem Referat über die AXERsche Abhandlung im Bd. XXXV des Jahrbuchs¶ über die Fortschritte der

* WEBER 2. 4. Für den einen Körper $\kappa(i)$ der vierten Einheitswurzeln hat Herr SIERPINSKI (1) übrigens (5) verschärft; doch erörtere ich die Konsequenzen hieraus nicht, da ich nur solche Überlegungen anstellen will, die für jeden Körper giltig sind.

† LANDAU 9, S. 156.

‡ MERTENS 1, S. 328.

§ AXER 1.

‖ *Asymptotische Gesetze im kubischen Kreisteilungskörper* (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XXI, S. 61–102). Ich bemerke ausdrücklich, dass die SCHLESERsche Arbeit manches Neue in Problemen, Resultaten und Beweisen enthält. Auch ist es nicht ohne Wert, dass der Verfasser bei einem Teil seiner Resultate das Restglied mit O durch explizite Angabe von Schranken ersetzt. Was ich zu beanstanden habe, bezieht sich fast lediglich auf den Teil der Arbeit, der mit meinem gegenwärtigen Thema zusammenhängt, und an keiner der von mir besprochenen Stellen handelt es sich um einen Fehlschluss.

¶ Jahrgang 1904 (erschienen 1906), S. 222–223.

M a t h e m a t i k ausdrücklich hingewiesen hatte) und andere Arbeiten von mir zu kennen. Z. B. beweist Herr SCHLESER bei $\kappa(\rho)$ je eine Formel* über $\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \phi(\mathfrak{n})$ und über die Anzahl der quadratfreien Ideale mit Norm $\leqq x$, zitiert beide Male Herrn AXERS Beweise dieser Formeln bei $\kappa(\rho)$ und weiss nicht, dass sie bei mir† für jeden Körper bewiesen stehen; er beweist ferner bei $\kappa(\rho)$ eine Formel‡ über die Anzahl der quadratfreien Teiler aller Ideale mit Norm $\leqq x$ und zitiert nur Herrn MERTENS' Analogon bei $\kappa(i)$, da er die von mir bewiesene Verallgemeinerung § für beliebiges κ nicht kennt. Die Unkenntnis des Vorhandenen veranlasst aber Herrn SCHLESER sowohl zu manchen Umwegen beim Beweis einfacher Dinge als auch zu unnütz hohen Fehlerabschätzungen in einigen Endformeln. Als Beispiel eines Umwegs erwähne ich, dass sich die vom Verfasser durch einen eine Seite langen Beweis hergeleitete Relation ||

$$(7) \qquad \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \log N\mathfrak{n} = ax \log x - ax + O(\sqrt{x} \log x)$$

ohne weiteres durch partielle Summation aus

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1 = ax + O(\sqrt{x})$$

ergiebt, d. h. aus dem Spezialfall $\kappa(\rho)$ von (5), der auch vordem bei ihm vorkam. Im Übrigen steht eine (7) enthaltende Relation für $\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \log N\mathfrak{n}$ für einen beliebigen Körper, wo das Restglied $O(x^{1-1/\nu} \log x)$ lautet, bei mir¶; ihre linke Seite entspricht dem TSCHEBYSCHEFschen $T(x)$, und jene Relation ist das Fundament der elementaren Untersuchungen über die Verteilung der Primideale geworden.

Was nun speziell die Beziehung der SCHLESERschen Arbeit zu meiner vorliegenden betrifft, so behandelt er u. a. den Spezialfall $\kappa(\rho)$ meines jetzigen $\tau_k(x; s)$ für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$, jedes Mal bei reellem s in folgendem Umfange und mit folgendem Ergebnis:

1) $k = 1$. Für $s \leqq 0$ erhält er** den Spezialfall von (3) in vollem Umfange, d. h. mit derselben Restabschätzung $O(x^{\frac{1}{2}-s})$. Für $0 < s < 1$ und $s > 1$ lässt sich sein†† Restglied $O(x^{1-s})$ laut (3) schärfer ersetzen: durch $b_0 x^{1-s} + O(x^{\frac{1}{2}-s})$ für $0 < s < \frac{1}{2}$, durch $b_0 x^{1-s} + O(\log x)$ für ‡‡ $s = \frac{1}{2}$, durch $b_0 x^{1-s} + b + O(x^{\frac{1}{2}-s})$ für $\frac{1}{2} < s < 1$ und durch $b_0 x^{1-s} + O(x^{\frac{1}{2}-s})$ für $s > 1$. Für $s = 1$ beweist er den

* Loc. cit., S. 80–81 bezw. S. 86–87.

† Loc. cit., S. 155, bezw. LANDAU 14 (auch vom Jahre 1903), S. 562.

‡ Loc. cit., S. 95.

§ LANDAU 9, S. 159.

|| Loc. cit., S. 88.

¶ LANDAU 9, S. 116.

** Loc. cit., S. 77–79.

†† Loc. cit., S. 74–75. Herr AXER (loc. cit., S. 245) hatte für $s > 1$ nur $O(x^{1-s} \log x)$ gefunden.

‡‡ Übrigens werde ich in § 6 (elementar) u. a. für $\kappa(\rho)$ zeigen, dass auch im Punkte $s = \frac{1}{2}$ das Restglied $b_0 x^{1-s} + O(x^{\frac{1}{2}-s}) = b_0 x^{1-s} + O(1)$ ist.

Spezialfall von (3), d. h. die Formel * über $\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1/N\mathfrak{n}$ unter Hinweis auf Herrn AXER, ohne zu wissen, dass ich † dies für jeden Körper schon gemacht habe.

2) $k=2$. Für $s \leqq 0$ erhält er ‡ den Spezialfall von (3) in vollem Umfange, d. h. mit $O(x^{\frac{3}{4}-s})$. Doch zitiert er bei der Formel für $s=0$, die ich § für jeden Körper bewiesen hatte, nur Herrn AXER (bei $\kappa(\rho)$). Den Fall $0<s<1$ behandelt er gar nicht. Für $s>1$ lässt sich sein ‖ Restglied $O(x^{1-s} \log x)$ laut (3) schärfer durch $x^{1-s}(b_1 \log x + b_0) + O(x^{\frac{3}{4}-s})$ ersetzen. Für $s=1$ beweist er ¶ nicht den Spezialfall von (3) mit $O(x^{-\frac{1}{4}})$, sondern nur eine Abschätzung mit $O(x^{-\frac{1}{4}} \log x)$. Dies zeigt, dass Herr SCHLESER sogar meine auf den Körper der rationalen Zahlen bezügliche Arbeit ** aus dem Jahre 1901 nicht kennt. Dort hätte er gelernt, dass diejenige Behandlung von $\sum_{N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \leqq x} 1/N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, welche er verwendet, bereits im Körper der rationalen Zahlen, wo BERGER so verfuhr, ein um den Faktor $\log x$ zu grosses Fehlerglied liefert, und, wie man dies vermeiden kann.

3) $k=3$. Herr SCHLESER behandelt hier nur $s=0$ mit dem Ergebnis †† $O(x^{\frac{7}{8}} \log x)$, während (3) hierfür $O(x^{\frac{5}{8}} \log x)$ ergiebt. Aus meiner soeben genannten, auf $\tau_3(x)$ in $\kappa(1)$ bezüglichen Arbeit hätte er gelernt, dass es unzweckmässig ist, eine gewisse auf der Zerlegung $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ basierende Identität zu Grunde zu legen, und dass die Zerlegung $x = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ vorteilhafter ist; bei $\kappa(\rho)$ ist es auch gerade diese Zerlegung, die zu dem Spezialfall von (3), d. h. zu $O(x^{\frac{5}{8}} \log x)$ führt.

Nun gelten, wie gesagt, (1) beim Körper der rationalen Zahlen und (3) bei einem beliebigen Körper zweiten oder höheren Grades für beliebige komplexe s, und das Ziel der gegenwärtigen Arbeit ist, den PILTZschen Satz (1) von Neuem und (3) zum ersten Mal zu beweisen. Das sind alles elementar zu erledigende Fragen; die grossen Schwierigkeiten der Primzahl- und Primidealtheorie treten dabei nicht auf. Die Arbeit ist folgendermassen angeordnet.

Im §1 erledige ich den Fall $k=1$, $\nu>1$, im §2 den Fall $k=1$, $\nu=1$. Im §3 zeige ich, dass für jedes $k \geqq 2$ die — gleichlautende — Behauptung (1) bezw. (3) nur auf der Geraden $\sigma = 1 - 1/k\nu$ bewiesen zu werden braucht, damit ihre Richtigkeit in der ganzen s-Ebene einleuchtet. Im §4 beweise ich (1) und (3) für jedes $k \geqq 2$ auf der Geraden $\sigma = 1 - 1/k\nu$ und zwar durch den Schluss von $k-1$ auf k, indem ich die Behauptung (1) bezw. (3) (für alle komplexen s) bei $1, \cdots, k-1$ als bewiesen annehme. Im §5 wird von den in (1) und (3) auftretenden

* Loc. cit., S. 77.
† LANDAU 9, S. 81.
‡ Loc. cit., S. 92.
§ LANDAU 9, S. 156.
‖ Loc. cit., S. 90.
¶ Loc. cit., S. 92.
** LANDAU 7.
†† Loc. cit, S. 102.

Konstanten die Rede sein. Im §6 verschärfe ich für einige Klassen von Zahlkörpern den Ausnahmefall $k=1$, $\sigma=1-1/\nu$ des Satzes (3); insbesondere wird das $\log x$ im Restglied bei jedem Körper fortfallen, dessen Zetafunktion auf der Geraden $\sigma=1-1/\nu$ überall regulär ist, wie dies z. B. im Körper der rationalen Zahlen der Fall ist.

§ 1.

Es sei der Körper beliebig, d. h. $\nu\geqq 1$. Dann gehe ich von der WEBERschen Relation

(5) $$\tau_1(x)=ax+O(x^{1-\frac{1}{\nu}})$$

aus. Man erhält durch partielle Summation * für $x\geqq 1$

$$\begin{aligned}\tau_1(x;\,s)&=\sum_{n=1}^{x}\frac{T_1(n)}{n^s}\\&=\sum_{n=1}^{x}\frac{\tau_1(n)-\tau_1(n-1)}{n^s}\\&=\sum_{n=1}^{x-1}\tau_1(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)+\frac{\tau_1(x)}{[x]^s}\\&=s\sum_{n=1}^{x-1}\tau_1(n)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{s+1}}+\frac{\tau_1(x)}{[x]^s}\\&=s\sum_{n=1}^{x-1}\int_n^{n+1}\frac{\tau_1(u)\,du}{u^{s+1}}+\frac{\tau_1(x)}{[x]^s}\end{aligned}$$

(8) $$=s\int_1^{[x]}\frac{\tau_1(u)}{u^{s+1}}\,du+\frac{\tau_1(x)}{[x]^s}.$$

Nach (5) ist

(9) $$\int_{[x]}^{x}\frac{\tau_1(u)}{u^{s+1}}\,du=O\left(\frac{x}{x^{\sigma+1}}\right)=O(x^{-\sigma})$$

und

(10) $$\frac{\tau_1(x)}{[x]^s}-\frac{\tau_1(x)}{x^s}=\tau_1(x)\,s\int_{[x]}^{x}\frac{du}{u^{s+1}}=O\left(\frac{x}{x^{\sigma+1}}\right)=O(x^{-\sigma});$$

aus (8), (9) und (10) folgt

(11) $$\tau_1(x;\,s)=s\int_1^{x}\frac{\tau_1(u)}{u^{s+1}}\,du+\frac{\tau_1(x)}{x^s}+O(x^{-\sigma}).$$

Wird

$$\tau_1(x)-ax=\eta(x)$$

* Diesen Kunstgriff und daraus sich ergebende Identitäten vom Typus (8) hatte Herr FRANEL (6) bei verschiedenen asymptotischen Abschätzungen benutzt; z. B., um (für $\kappa(1)$) aus der DIRICHLETschen Relation für $\tau_2(x)$ Abschätzungen von $\tau_2(x;\,s)$ zu erhalten. Jedoch liefert hier der FRANELsche Ansatz (eben wegen der Geraden $\sigma=1-1/k\nu=\frac{1}{2}$) nicht die mit elementaren Mitteln bestmögliche Abschätzung, für $\sigma\gtrless\frac{1}{2}$ aber genau (1) mit $k=2$. Im Übrigen hatte ja Herr PILTZ für alle s (auch, wenn $\sigma=\frac{1}{2}$ ist) die Relation (1) mit $k=2$ bereits bewiesen.

gesetzt, so ist nach (5)

$$\frac{\eta(x)}{x^{s+1}} = O(x^{-\sigma-\frac{1}{\nu}}), \tag{12}$$

was sofort Anwendung finden wird.

(11) giebt

$$\tau_1(x;\,s) = sa\int_1^x \frac{du}{u^s} + s\int_1^x \frac{\eta(u)}{u^{s+1}}\,du + ax^{1-s} + \frac{\eta(x)}{x^s} + O(x^{-\sigma})$$

$$= sa\int_1^x \frac{du}{u^s} + ax^{1-s} + s\int_1^x \frac{\eta(u)}{u^{s+1}}\,du + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{\nu}}). \tag{13}$$

Hierin ist

$$\int_1^x \frac{du}{u^s} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-s}}{1-s} - \dfrac{1}{1-s} & \text{für } s \neq 1, \\ \log x & \text{für } s = 1, \end{cases}$$

ferner nach (12)

$$\int_1^x \frac{\eta(u)}{u^{s+1}}\,du = \begin{cases} O(x^{1-\sigma-\frac{1}{\nu}}) & \text{für } \sigma < 1 - \dfrac{1}{\nu}, \\ O(\log x) & \text{für } \sigma = 1 - \dfrac{1}{\nu}, \\ \displaystyle\int_1^\infty \frac{\eta(u)}{u^{s+1}}\,du + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{\nu}}) & \text{für } \sigma > 1 - \dfrac{1}{\nu}. \end{cases}$$

(13) liefert daher

$$\tau_1(x;\,s) = \begin{cases} b_0 x^{1-s} + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{\nu}}) & \text{für } \sigma < 1 - \dfrac{1}{\nu}, \\ b_0 x^{1-s} + O(\log x) & \text{für } \sigma = 1 - \dfrac{1}{\nu}, \\ b_1 \log x + B + O(x^{-\frac{1}{\nu}}) & \text{für } s = 1, \\ b_0 x^{1-s} + b + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{\nu}}) & \text{für } \sigma > 1 - \dfrac{1}{\nu} \text{ exkl. } s = 1. \end{cases}$$

Damit ist im Falle $k=1$, $\nu \geqq 2$ die Behauptung (3) völlig bewiesen; im Falle $k=1$, $\nu=1$ ist die Behauptung (1) mit Ausnahme der Geraden $\sigma = 0$ bewiesen.

§ 2.

Es bleibt zur völligen Erledigung des Falles $k = 1$ nachzuweisen, dass für $\sigma = 0$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} = b_0 x^{1-s} + O(1)$$

ist. Dies geschieht folgendermassen. Die Behauptung ist für $s = 0$ trivial.

Es sei also $\sigma = 0$, aber $s \neq 0$. Dann wird beim Beweise die in (1) wegen $\Re(s+1) = 1$ ganz speziell steckende Thatsache

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{s+1}} = O(1) \tag{14}$$

benutzt werden.

Nun ist — für alle komplexen s sogar —

$$\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} = \frac{1}{n^{s-1}}\left\{1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-s}\right\}$$

$$= \frac{1}{n^{s-1}}\left\{-\frac{1-s}{n} + \frac{(1-s)s}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1-s}{n^s} + \frac{(1-s)s}{2n^{s+1}} + \psi(n),$$

wo

$$\psi(n) = O\left(\frac{1}{n^{\sigma+2}}\right) \tag{15}$$

ist, also bei Summation über $n = 1, \cdots, [x]$, wo $x \geqq 1$ ist,

$$1 - \frac{1}{([x]+1)^{s-1}} = -(1-s)\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^s} + \frac{(1-s)s}{2}\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^{s+1}} + \sum_{n=1}^{x}\psi(n).$$

Speziell für $s \neq 0$, $\sigma = 0$ liefert dies nach (14) und (15)

$$1 - \frac{1}{x^{s-1}} + O(1) = -(1-s)\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^s} + O(1) + O(1),$$

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(1) = b_0 x^{1-s} + O(1),$$

wie behauptet.

§ 3.

Es sei also in der Folge $k \geqq 2$; die Fälle $\nu = 1$ und $\nu > 1$ brauchen nicht mehr getrennt zu werden.

In diesem Paragraphen will ich bei festem $k \geqq 2$ zeigen, dass aus der Richtigkeit der Behauptung im Punkte $s = 1 - 1/k\nu$ die Giltigkeit in jeder der beiden Halbebenen $\sigma < 1 - 1/k\nu$ und $\sigma > 1 - 1/k\nu$ folgt, so dass also der Beweis der Behauptung (1) bezw. (3) alsdann nur auf der Geraden $\sigma = 1 - 1/k\nu$ geführt zu werden braucht.

Ich gehe also bei festem Körper und festem $k \geqq 2$ von

$$\tau_k\left(x;\ 1 - \frac{1}{k\nu}\right) = x^{\frac{1}{k\nu}} \sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + O(\log^{k-2} x) \tag{16}$$

aus.

Durch partielle Summation ergiebt sich für $x \geqq 1$

$$\tau_k(x;\, s) = \sum_{n=1}^{x} \frac{T_k(n) \cdot n^{-1+\frac{1}{k\nu}}}{n^{s-1+\frac{1}{k\nu}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{\tau_k\left(n;\, 1-\frac{1}{k\nu}\right) - \tau_k\left(n-1;\, 1-\frac{1}{k\nu}\right)}{n^{s-1+\frac{1}{k\nu}}}$$

(17) $$= \left(s-1+\frac{1}{k\nu}\right)\int_1^{[x]} \frac{\tau_k\left(u;\, 1-\frac{1}{k\nu}\right)}{u^{s+\frac{1}{k\nu}}}\,du + \frac{\tau_k\left(x;\, 1-\frac{1}{k\nu}\right)}{[x]^{s-1+\frac{1}{k\nu}}}.$$

Wenn

$$\tau_k\left(x;\, 1-\frac{1}{k\nu}\right) - x^{\frac{1}{k\nu}} \sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x = \mathrm{H}(x)$$

gesetzt wird, so ist nach (16)

(18) $$\frac{\mathrm{H}(x)}{x^{s+\frac{1}{k\nu}}} = O\left(\frac{\log^{k-2} x}{x^{\sigma+\frac{1}{k\nu}}}\right).$$

Aus (17) folgt weiter

$$\tau_k(x;\, s) = \left(s-1+\frac{1}{k\nu}\right)\int_1^{x} \frac{\tau_k\left(u;\, 1-\frac{1}{k\nu}\right)}{u^{s+\frac{1}{k\nu}}}\,du$$

$$+ \frac{\tau_k\left(x;\, 1-\frac{1}{k\nu}\right)}{x^{s-1+\frac{1}{k\nu}}} + O(x^{-\sigma} \log^{k-1} x)$$

(19) $$\left\{\begin{aligned} &= \left(s-1+\frac{1}{k\nu}\right)\sum_{m=0}^{k-1} b_m \int_1^x \frac{\log^m u}{u^s}\,du + \left(s-1+\frac{1}{k\nu}\right)\int_1^x \frac{\mathrm{H}(u)}{u^{s+\frac{1}{k\nu}}}\,du \\ &\quad + x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k\nu}} \log^{k-2} x) + O(x^{-\sigma}\log^{k-1} x). \end{aligned}\right.$$

Nun ist bei ganzem $m \geqq 0$ und positivem x

$$\int_1^x \frac{\log^m u}{u^s}\,du = \begin{cases} x^{1-s}(c_m \log^m x + \cdots + c_0) - c_0 & \text{für } s \neq 1, \\ \dfrac{\log^{m+1} x}{m+1} & \text{für } s = 1, \end{cases}$$

also

$$\left(s-1+\frac{1}{k\nu}\right)\sum_{m=0}^{-1} b_m \int_1^x \frac{\log^m u}{u^s}\,du + x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x = x^{1-s}\sum_{m=0}^{k} d_m \log^m x + A,$$

wo d_k für $s \neq 1$ verschwindet. Ferner kann in (19) wegen $-\sigma < 1 - \sigma - 1/k\nu$ das letzte Glied gegen das vorletzte vernachlässigt werden, und es ist nach (18)

$$\int_1^x \frac{\mathrm{H}(u)}{u^{s+\frac{1}{k\nu}}}\,du = \begin{cases} O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k\nu}}\log^{k-2} x) & \text{für } \sigma < 1 - \frac{1}{k\nu}, \\ D + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k\nu}}\log^{k-2} x) & \text{für } \sigma > 1 - \frac{1}{k\nu}. \end{cases}$$

Aus (19) ergiebt sich also für $\sigma < 1 - 1/k\nu$ und $\sigma > 1 - 1/k\nu$

$$\tau_k(x;\, s) = x^{1-s}\sum_{m=0}^{k} d_m \log^m x + d + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k\nu}}\log^{k-2} x),$$

wie in (1) und (3) behauptet.

§ 4.

Der Beweis von (1) und (3) für alle Wertepaare k, s und alle κ ist also auf den Nachweis von (1) und (3) für $\sigma = 1 - 1/k\nu$ bei $k \geqq 2$ reduziert, und dabei darf die Behauptung (1) bezw. (3) für 1 bis $k-1$ bei jedem s in dem betreffenden Körper κ als bewiesen angenommen werden.

Es ist identisch, wenn erst die Idealsysteme mit $N\mathfrak{a}_k \leqq x^{1/k}$, dann die mit $N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{k-1}) \leqq x^{(k-1)/k}$ berücksichtigt werden und zum Schluss die doppelt gezählten hinweggenommen werden, für jedes komplexe s

$$\tau_k(x;\, s) = \sum_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k) \leqq x} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_k)^s}$$

$$= \sum_{N\mathfrak{a}_k \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}_k^s} \sum_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{k-1}) \leqq \frac{x}{N\mathfrak{a}_k}} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{k-1})^s}$$

$$+ \sum_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{k-1}) \leqq x^{\frac{k-1}{k}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{k-1})^s} \sum_{N\mathfrak{a}_k \leqq \frac{x}{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{k-1})}} \frac{1}{N\mathfrak{a}_k^s}$$

$$- \sum_{N\mathfrak{a}_k \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}_k^s} \cdot \sum_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{k-1}) \leqq x^{\frac{k-1}{k}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{k-1})^s}$$

$$(20)\quad \begin{cases} = \displaystyle\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}\,\tau_{k-1}\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}};\, s\right) \\ + \displaystyle\sum_{N(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{k-1}) \leqq x^{\frac{k-1}{k}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{k-1})^s}\,\tau_1\left(\frac{x}{N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{k-1})};\, s\right) \\ - \tau_1(x^{\frac{1}{k}};\, s)\,\tau_{k-1}(x^{\frac{k-1}{k}};\, s). \end{cases}$$

Nun sei $\sigma = 1 - 1/k\nu$. Es ist nach dem schon Bewiesenen bezw. als bewiesen

Angenommenen

$$\tau_1(x;s) = b_0 x^{1-s} + b + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{\nu}})$$
$$= b_0 x^{1-s} + b + O(x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{\nu}})$$

und (auch, wenn $k=2$ sein sollte*)

$$\tau_{k-1}(x;s) = x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-2} f_m \log^m x + f + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{(k-1)\nu}}\log^{k-2} x)$$
$$= x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-2} f_m \log^m x + f + O(x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{(k-1)\nu}}\log^{k-2} x)\,.$$

Es ist bequemer, die Identität (20) in der Form

$$\tau_k(x;s) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}\left\{\tau_{k-1}\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}};s\right)-f\right\}$$
$$+ \sum_{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1}) \leqq x^{\frac{k-1}{k}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})^s}\left\{\tau_1\left(\frac{x}{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})};s\right)-b\right\}$$
$$-\{\tau_1(x^{\frac{1}{k}};s)-b\}\{\tau_{k-1}(x^{\frac{k-1}{k}};s)-f\}+bf$$

zu schreiben. Wenn die drei ersten Glieder rechts mit $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ bezeichnet werden, also

$$(21) \qquad \tau_k(x;s) = U(x) + V(x) + W(x) + bf$$

ist, so ergiebt sich hierin einzeln folgendes:

$$U(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}\frac{x^{1-s}}{N\mathfrak{a}^{1-s}}\sum_{m=0}^{k-2} f_m \log^m\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)$$
$$+ O\sum_{N\mathfrak{a} \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{1-\frac{1}{k\nu}}}\frac{x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{(k-1)\nu}}}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{(k-1)\nu}}}\log^{k-2}\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)$$
$$= x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-2} f_m \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}}\log^m\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right)$$
$$+ O\left(x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{(k-1)\nu}}\log^{k-2} x \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{1-\frac{1}{(k-1)\nu}}}\right)$$
$$= x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-2} f_m \sum_{q=0}^{m}(-1)^q\binom{m}{q}\log^{m-q} x \sum_{N\mathfrak{a} \leqq x^{\frac{1}{k}}} \frac{\log^q N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}$$

---

* In der That steht im letzten Glied der durch (1) bezw. (3) gelieferten Abschätzung von $\tau_{k-1}(x;s)$ der Faktor $\log^0 x$ für $k=2$, $\log^{k-3} x$ für $k \geqq 3$, so dass $\log^{k-2} x$ jedenfalls richtig ist.

$$+O\left\{x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{(k-1)\nu}}\log^{k-2}x\cdot\tau_1\left(x^{\frac{1}{k}};\ 1-\frac{1}{(k-1)\nu}\right)\right\}$$

$$=x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-2}\sum_{q=0}^{m}g_{mq}\log^{m-q}x\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x^{\frac{1}{k}}}\frac{\log^q N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}$$

$$+O\left(x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{(k-1)\nu}}\log^{k-2}x\cdot x^{\frac{1}{k}-\frac{1}{(k-1)\nu}}\right)$$

$$(22)\qquad =x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-2}\sum_{q=0}^{m}g_{mq}\log^{m-q}x\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x^{\frac{1}{k}}}\frac{\log^q N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}+O(\log^{k-2}x).$$

Nun ist für jedes ganze $q\geqq 0$, wenn $\eta(x)$ die Bedeutung des §1 hat,

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqq x}\frac{\log^q N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{a}}=\sum_{n=1}^{x}\{\tau_1(n)-\tau_1(n-1)\}\frac{\log^q n}{n}$$

$$=\alpha\sum_{n=1}^{x}\frac{\log^q n}{n}+\sum_{n=1}^{x}\{\eta(n)-\eta(n-1)\}\frac{\log^q n}{n}$$

$$=\alpha\sum_{n=1}^{x}\frac{\log^q n}{n}+\sum_{n=1}^{x-1}\eta(n)\left(\frac{\log^q n}{n}-\frac{\log^q(n+1)}{n+1}\right)+\frac{\eta([x])\log^q[x]}{[x]}$$

$$=\alpha\left\{\frac{\log^{q+1}x}{q+1}+c+O\left(\frac{\log^q x}{x}\right)\right\}+\sum_{n=1}^{x-1}O\left(\frac{\log^q n}{n^{1+\frac{1}{\nu}}}\right)+O(x^{-\frac{1}{\nu}}\log^q x)$$

$$=\frac{\alpha}{q+1}\log^{q+1}x+\alpha c+\sum_{n=1}^{\infty}O\left(\frac{\log^q n}{n^{1+\frac{1}{\nu}}}\right)+O\int_x^{\infty}\frac{\log^q u}{u^{1+\frac{1}{\nu}}}du+O(x^{-\frac{1}{\nu}}\log^q x)$$

$$(23)\qquad =\frac{\alpha}{q+1}\log^{q+1}x+c'+O(x^{-\frac{1}{\nu}}\log^q x).$$

(23) ergiebt, in (22) eingesetzt,

$$U(x)=x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-1}h_m\log^m x+O\left(x^{1-\sigma}\frac{\log^{k-2}x}{x^{\frac{1}{k\nu}}}\right)+O(\log^{k-2}x)$$

$$(24)\qquad =x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-1}h_m\log^m x+O(\log^{k-2}x).$$

Ferner ist

$$V(x)=b_0\sum_{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})\leqq x^{\frac{k-1}{k}}}\frac{1}{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})^s}\frac{x^{1-s}}{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})^{1-s}}$$

$$+O\sum_{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})\leqq x^{\frac{k-1}{k}}}\frac{1}{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})^{1-\frac{1}{k\nu}}}\frac{x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{\nu}}}{N(\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{k-1})^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{\nu}}}$$

$$=b_0x^{1-s}\tau_{k-1}(x^{\frac{k-1}{k}};\ 1)+O\left\{x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{\nu}}\tau_{k-1}\left(x^{\frac{k-1}{k}};\ 1-\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

$$= b_0 x^{1-s}\left(\sum_{m=0}^{k-1} l_m \log^m x + O(x^{-\frac{1}{(k-1)\nu}\frac{k-1}{k}} \log^{k-2} x)\right) + O(x^{\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{\nu}} x^{\frac{1}{\nu}\frac{k-1}{k}} \log^{k-2} x)$$

$$(25) \quad = x^{1-s} \sum_{m=0}^{k-1} p_m \log^m x + O(\log^{k-2} x)$$

und

$$W(x) = \{ b_0 x^{\frac{1}{k}(1-s)} + O(x^{(\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{\nu})\frac{1}{k}})\}$$

$$\times \left\{ x^{\frac{k-1}{k}(1-s)} \sum_{m=0}^{k-2} q_m \log^m x + O\left(x^{(\frac{1}{k\nu}-\frac{1}{(k-1)\nu})\frac{k-1}{k}} \log^{k-2} x \right)\right\}$$

$$(26) \quad = x^{1-s} \sum_{m=0}^{k-2} r_m \log^m x + O(\log^{k-2} x).$$

Nach (21), (24), (25) und (26) ist

$$\tau_k(x;\ s) = x^{1-s} \sum_{m=0}^{k-1} u_m \log^m x + O(\log^{k-2} x);$$

somit kommt gerade die Behauptung (1) bezw. (3) für $\sigma = 1 - 1/k\nu$ heraus. Nach dem Obigen sind damit (1) und (3) in allen Fällen bewiesen.

§ 5.

Es gilt, mindestens im Kreise $|s-1| < 1/\nu$, eine Reihenentwickelung

$$\zeta_\kappa(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (s-1)^n$$

für die dem Körper κ entsprechende Zetafunktion; α ist genau die Konstante aus (5). Bei jedem ganzen $k \geqq 1$ gilt also ebenda eine Reihenentwickelung

$$\zeta_\kappa^k(s) = \frac{\beta_k}{(s-1)^k} + \cdots + \frac{\beta_1}{s-1} + \beta_0 + \gamma_1(s-1) + \gamma_2(s-1)^2 + \cdots,$$

wo ich die Abhängigkeit der Koeffizienten von k nicht erst in der Bezeichnung hervorheben will.

Ich behaupte zunächst, dass der Hauptbestandteil in $\tau_k(x;\ 1)$ (d. h. das in (1) bezw. (3) für $s=1$ vor O stehende) den Wert

$$\sum_{m=0}^{k} \frac{\beta_m}{m!} \log^m x$$

hat. Da die genauere Abschätzung des Fehlers, nämlich $O(x^{-1/\nu})$ für $k=1$ bezw. $O(x^{-1/k\nu} \log^{k-2} x)$ für $k \geqq 2$, schon erledigt ist, ist es nur noch nötig, den Nachweis zu erbringen, dass in

$$\tau_k(x;\ 1) = \sum_{n=1}^{x} \frac{T_k(n)}{n} = b_k \log^k x + \cdots + b_1 \log x + b_0 + o(1)$$

für $0 \leqq m \leqq k$

$$b_m = \frac{\beta_m}{m!}$$

ist. Durch partielle Summation ergiebt sich für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned}
\zeta_\kappa^k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_k(n)}{n} \cdot \frac{1}{n^{s-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n;1) - \tau_k(n-1;1)}{n^{s-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_k(n;1)\left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}}\right) \\
&= (s-1)\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\tau_k(u;1)}{u^s}\,du \\
&= (s-1)\int_1^{\infty} \frac{\tau_k(u;1)}{u^s}\,du \\
&= (s-1)\left(b_k \int_1^{\infty} \frac{\log^k u}{u^s}\,du + \cdots + b_1 \int_1^{\infty} \frac{\log u}{u^s}\,du + b_0 \int_1^{\infty} \frac{du}{u^s} + \psi(s)\right),
\end{aligned}$$

wo bei Annäherung aus der Halbebene $\sigma > 1$

$$\lim_{s=1} \frac{\psi(s)}{\int_1^{\infty} \frac{du}{u^s}} = 0,$$

d. h.

$$\lim_{s=1} (s-1)\psi(s) = 0$$

ist. Nun ist für $\sigma > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^k u}{u^s}\,du = \frac{k!}{(s-1)^{k+1}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\log u}{u^s}\,du = \frac{1!}{(s-1)^2},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{u^s} = \frac{1}{s-1};$$

es kommt also heraus:

$$\lim_{s=1}\left(\zeta_\kappa^k(s) - \frac{k!\,b_k}{(s-1)^k} - \cdots - \frac{1!\,b_1}{s-1} - b_0\right) = 0.$$

d. h.

$$b_k = \frac{\beta_k}{k!},\ \cdots,\ b_1 = \frac{\beta_1}{1!},\ b_0 = \beta_0,$$

was zu beweisen war.

Nachdem

$$\tau_k(x;1) = \sum_{m=0}^{k} \frac{\beta_m}{m!} \log^m x + O(x^{-\frac{1}{k\nu}}) + O(x^{-\frac{1}{k\nu}} \log^{k-2} x)$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{\beta_m}{m!} \log^m x + O(x^{-\frac{1}{k\nu}} \log^{k-1} x)$$

bewiesen ist, ergiebt sich die Konstantenbestimmung in (1) und (3) folgendermassen. Es braucht $\tau_k(x;s)$ für $\sigma > 1 - 1/k\nu$ nur auf $o(1)$ genau, für $\sigma \leqq 1 - 1/k\nu$ nur auf $o(x^{1-\sigma})$ genau bestimmt zu werden, um durch Vergleich mit den schon bewiesenen Relationen (1) und (3) die Konstantenbestimmungen zu haben.

Für $\sigma > 1$ ist in

$$\tau_k(x;s) = b + o(1)$$

das b zu bestimmen; offenbar ist

$$b = \lim_{x=\infty} \tau_k(x;s) = \zeta_\kappa^k(s).$$

Für $1 - 1/k\nu < \sigma \leqq 1$ exkl. $s = 1$ sind in

$$\tau_k(x;s) = x^{1-s} \sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + b + o(1)$$

$b, b_0, \cdots, b_{k-1}$ zu bestimmen und für $\sigma \leqq 1 - 1/k\nu$ in

$$\tau_k(x;s) = x^{1-s} \sum_{m=0}^{k-1} b_m \log^m x + o(x^{1-\sigma})$$

$b_0, \cdots, b_{k-1}$. Nun ist für jedes s

$$\tau_k(x;s) = (s-1)\int_1^{[x]} \frac{\tau_k(u;1)}{u^s}\,du + \frac{\tau_k(x;1)}{[x]^{s-1}}$$

$$= (s-1)\int_1^{x} \frac{\tau_k(u;1)}{u^s}\,du + \frac{\tau_k(x;1)}{x^{s-1}} + O(x^{-\sigma} \log^k x)$$

$$(27)\quad \begin{cases} = (s-1)\displaystyle\int_1^{x} u^{-s} \sum_{m=0}^{k} \frac{\beta_m}{m!} \log^m u\,du + x^{1-s} \sum_{m=0}^{k} \frac{\beta_m}{m!} \log^m x \\ +(s-1)\displaystyle\int^{x} O(u^{-\sigma-\frac{1}{k\nu}} \log^{k-1} u)du + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k\nu}} \log^{k-1} x) + O(x^{-\sigma} \log^k x). \end{cases}$$

Hierin ist für $s \neq 1 \quad x > 0$

$$(s-1)\int_1^x u^{-s}\sum_{m=0}^{k}\frac{\beta_m}{m!}\log^m u\,du + x^{1-s}\sum_{m=0}\frac{\beta_m}{m!}\log^m x$$

$$= (s-1)\sum_{m=0}^{k}\frac{\beta_m}{m!}\int_1^x u^{-s}\log^m u\,du + x^{1-s}\sum_{m=0}^{k}\frac{\beta_m}{m!}\log^m x$$

$$= (s-1)\sum_{m=0}^{k}\frac{\beta_m}{m!}\left(-x^{1-s}\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{n!(s-1)^{m+1-n}}\log^n x + \frac{m!}{(s-1)^{m+1}}\right)$$

$$+ x^{1-s}\sum_{m=0}^{k}\frac{\beta_m}{m!}\log^m x$$

$$= x^{1-s}\sum_{n=0}^{k}\frac{\log^n x}{n!}\left(-(s-1)\sum_{m=n}^{k}\frac{\beta_m}{(s-1)^{m+1-n}} + \beta_n\right) + c$$

$$= -x^{1-s}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(s-1)^n}{n!}\log^n x\sum_{m=n+1}^{k}\frac{\beta_m}{(s-1)^m} + c.$$

Für $\sigma \leqq 1 - 1/k\nu$ sind damit alle Konstanten bestimmt, da die drei Restglieder in (27) reichlich $o(x^{1-\sigma})$ sind; es ist nämlich für $0 \leqq n \leqq k-1$

$$b_n = -\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{k}\frac{\beta_m}{(s-1)^{m-n}}. \tag{28}$$

Für $1 - 1/k\nu < \sigma \leqq 1$ exkl. $s = 1$ ist

$$(s-1)\int_1^x O(u^{-\sigma-\frac{1}{k\nu}}\log^{k-1}u)\,du + O(x^{1-\sigma-\frac{1}{k\nu}}\log^{k-1}x) + O(x^{-\sigma}\log^k x)$$

$$= (s-1)\int_1^\infty O(u^{-\sigma-\frac{1}{k\nu}}\log^{k-1}u)\,du + o(1) + o(1) + o(1) = c' + o(1);$$

also bleibt hier nur die Konstante

$$b = \lim_{x=\infty}\left(\tau_k(x;\,s) - x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-1} b_m\log^m x\right)$$

zu bestimmen, wo $b_0, \cdots, b_{k-1}$ den Wert (28) haben. Aus

$$\tau_k(x;\,s) = x^{1-s}\sum_{m=0}^{k-1} b_m\log^m x + b + \epsilon(x),$$

wo

$$\epsilon(x) = o(1) \tag{29}$$

ist, folgt in der Halbebene $\Re(S) > 1$

$$\zeta_\kappa^k(S) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k(n;\,s) - \tau_k(n-1;\,s)}{n^{S-s}}$$

$$= (S - s) \int_1^\infty \frac{\tau_k(u;\, s)}{u^{S-s+1}}\, du$$

$$= (S - s) \sum_{m=0}^{k-1} b_m \int_1^\infty \frac{\log^m u}{u^S}\, du + (S - s) \int_1^\infty \frac{b + \epsilon(u)}{u^{S-s+1}}\, du$$

(30) $$= (S - s) \sum_{m=0}^{k-1} b_m \frac{m!}{(S-1)^{m+1}} + b + (S - s) \int_1^\infty \frac{\epsilon(u)}{u^{S-s+1}}\, du.$$

Hierin ist das letzte Glied wegen (29) für $\Re(S) > \sigma$ regulär und hat bei Annäherung aus dieser Halbebene für $S = s$ den Limes 0. (30) ist also in der Halbebene $\Re(S) > \sigma$ exkl. $S = 1$ giltig und liefert, wenn S gegen s strebt,

$$\zeta_\kappa^k(s) = b.$$

Damit sind alle Konstanten bestimmt.

§ 6.

Ich will nun zu dem sogenannten Ausnahmefall

$$k = 1, \quad \sigma = 1 - \frac{1}{\nu}$$

zurückkehren, wo zwar für $\nu = 1$

$$\tau_1(x;\, s) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} = b_0 x^{1-s} + O(1),$$

aber für $\nu \geqq 2$ nur

$$\tau_1(x;\, s) = \sum_{Nn \leqq x} \frac{1}{Nn^s} = b_0 x^{1-s} + O(\log x)$$

herausgekommen war, und will beweisen:

Falls für einen bestimmten Körper κ ein bestimmter Punkt s_0 der Geraden $\sigma = 1 - 1/\nu$ eine reguläre Stelle der Funktion $\zeta_\kappa(s)$ ist, ist

$$\tau_1(x;\, s_0) = b_0 x^{1-s_0} + O(1).$$

Hierzu benutze ich folgenden schönen Satz von Herrn Marcel Riesz:

Wenn für ein $c \gtreqless 0$ bei ganzzahlig wachsendem n

(31) $$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n^c} = O(1)$$

ist und die infolgedessen für $\sigma > c$ reguläre Funktion

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

in einem bestimmten Punkte $s_0 = c + t_0 i$ der Geraden $\sigma = c$ regulär ist, so ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^{s_0}} = O(1).$$

Dieser Satz, den mir Herr RIESZ mündlich mitteilte, wird genau so bewiesen wie der RIESZsche Satz, für welchen ich kürzlich den vordem unpublizierten Beweis des Entdeckers auf S. 151–167 meiner Abhandlung * mitgeteilt habe: *Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren* HARDY *und* AXER. Zunächst lässt sich nämlich offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c=1$ annehmen†, dann wie auf S. 152–153 ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_0=0$ annehmen, dann wie auf S. 156–158 der Beweis des Satzes auf den des entsprechenden Satzes mit der schärferen Voraussetzung

$$a_n = O(1)$$

statt

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = O(1)$$

reduzieren und dann diese Behauptung mutatis mutandis wie die damalige auf S. 158–167 beweisen. Hier wird die Behauptung—parallel zu S. 158–161—auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\Gamma \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds = O(1)$$

reduziert; dies—parallel zu S. 161–165—mittelst des Nachweises von

$$J_1(m) = O(1)$$

auf den Beweis von

$$J_3(m) = O(1),$$

und dieser Beweis gelingt, sogar mit der hier unnötigen Schärfe $\lim_{m=\infty} J_3(m) = 2\pi i f(1)$, wie auf S. 165–167.

Dies kann dem Leser meiner soeben zitierten Arbeit als völlig ausreichender Beweis des oben genannten RIESZschen Satzes dienen.

Diesen Satz wende ich nun auf $c=1-1/\nu$ und die DIRICHLETsche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta_\kappa(s) - \alpha\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

an. Dann ist

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n^{1-\frac{1}{\nu}}} = O(1)$$

nach dem WEBERschen Satz; wenn also $s_0 = 1 - \frac{1}{\nu} + t_0 i$ regulär ist, ist nach dem RIESZschen Satz

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \alpha \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{s_0}} + O(1);$$

* Prace matematyczno-fizyczne, Bd. XXI (1910), S. 97–177.

† In der That folgt bei beliebigem c aus (31) durch partielle Summation

$$\frac{a_1}{1^{c-1}} + \cdots + \frac{a_n}{n^{c-1}} = O(n).$$

nach (1) ist

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^{s_0}} = c_0 x^{1-s_0} + c + O(x^{-1+\frac{1}{\nu}}) = c_0 x^{1-s_0} + O(1),$$

und damit kommt die Behauptung

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{n}^{s_0}} = b_0 x^{1-s_0} + O(1)$$

heraus.

Insbesondere für quadratische Körper ist bekanntlich

$$\zeta_\kappa(s) - \frac{a}{s-1}$$

eine ganze Funktion, also überall auf der Geraden $\sigma=1-1/\nu$ regulär, folglich die obige Verschärfung auf der ganzen Geraden giltig. Allerdings ist in diesem Fall der RIESZsche Satz nicht nötig, um es einzusehen; sondern es geht direkt so: Wenn D die Grundzahl ist und $\left(\frac{D}{n}\right)$ die KRONECKERsche Verallgemeinerung des JACOBIschen Symbols ist, ist für $\sigma > 1$

$$\zeta_\kappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Für $\sigma=1-1/\nu=\frac{1}{2}$ ist also

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{nm \leqq x}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}\cdot\frac{1}{m^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}\sum_{m=1}^{\frac{x}{n}}\frac{1}{m^s} + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{m^s}\sum_{n=1}^{\frac{x}{m}}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{m^s}$$

Nun ist

$$\sum_{m=1}^{x}\frac{1}{m^s} = c_0 x^{1-s} + c + O(x^{-\frac{1}{2}})$$

und wegen

$$\sum_{n=1}^{x}\left(\frac{D}{n}\right) = O(1)$$

$$\sum_{n=1}^{x}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s} = L + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

laher ergiebt sich

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}\left(c\,\frac{x^{1-s}}{n^{1-s}} + c\right) + O\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}}$$

$$+ L\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{m^s} + O\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}} - L\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{m^s} + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

$$= c_0 x^{1-s} \sum_{n=1}^{\sqrt{\ }} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} + O(1) + O(1) + O(1)$$

$$= c_0 x^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} + O\left(x^{1-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + O(1)$$

$$= b_0 x^{1-s} + O(1).$$

Ich möchte nicht unterlassen hervorzuheben, dass die Thatsache der elementaren Beweisbarkeit dieser Relation einem bekannten elementaren MERTENSschen Beweise* des Nichtverschwindens von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

zu Grunde liegt. Dazu braucht nur $b_0 \neq 0$ für $s = \frac{1}{2}$ bewiesen zu werden, d. h. in

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{n}}} = O(1)$$

ein Widerspruch aufgefunden zu werden, und ein solcher liegt darin, dass jede Quadratzahl $\geqq 1$ Norm eines Ideals, also

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{n}}} \geqq \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{m^2}} = \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{m}$$

ist.

GÖTTINGEN, den 23. *Juni* 1911.

* Vergl. MERTENS 6, LANDAU 34 und S. 433–435 meines Handbuchs.